V CONGRESSO IBÉRICO DE ACTUÁRIOS

6 June - 7 June 2016
at
ISEG- Lisbon School of Economics and Management

Intervalos de confiança para rendas vitalícias: aplicação a fundos de pensões

CIDÁLIA TOMÁS – LOURDES AFONSO – PEDRO CORTE REAL

FACULDADE DE CIÊNCIAS E TECNOLOGIA
UNIVERSIDADE NOVA DE LISBOA

OBJETIVO GERAL

Estabelecer intervalos de confiança para rendas vitalícias

OBJETIVOS ESPECÍFICOS

- Identificar e apresentar uma nova ferramenta de análise a utilizar para os cálculos atuariais;
- Aplicar esta ferramenta à avaliação das responsabilidades de um plano de pensões;

MORTALIDADE
Tempo de vida futura

- T v.a. que representa o tempo de vida futura de um indivíduo de idade (x)
- $(x+T)$ será a idade da morte de (x)
- Função de distribuição: $G(t) = \Pr(T \leq t)\,, t \geq 0$

- Probabilidade de (x) morrer nos próximos t anos:

$$_tq_x = G(t)$$

- Probabilidade de (x) sobreviver aos próximos t anos:

$$_tp_x = 1 - G(t)$$

MORTALIDADE
Tempo de vida futura em anos completos

- variável aleatória $K = [T]$
- função de distribuição:

$$\Pr(K = k) = \Pr(k \leq T < k + 1) = {}_{k}p_x \, q_{x+k}$$

para $k = 0,1,2 \ldots$

RENDAS
Rendas certas

- i – taxa de capitalização
- v – taxa de atualização
- Tem-se a relação $i = \frac{1}{1+i}$

- ## Renda certa antecipada

$$\ddot{a}_{\overline{n|}} = 1 + v + v^2 + \cdots + v^{n-1} = \frac{1 - v^n}{1 - v}$$

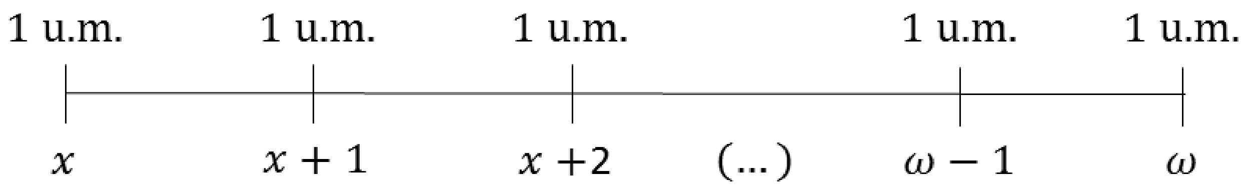
- ## Renda certa postecipada

$$a_{\overline{n|}} = v + v^2 + \cdots + v^n = \ddot{a}_n - 1 + v^n = \frac{1 - v^n}{i}$$

RENDAS
Rendas vitalícias

- Renda antecipada de termos constantes

$$\ddot{a}_x = 1 + v\, p_x + v^2\ {}_2p_x + v^3\ {}_3p_x + \cdots + v^{\omega-x}\ {}_{\omega-x}p_x$$



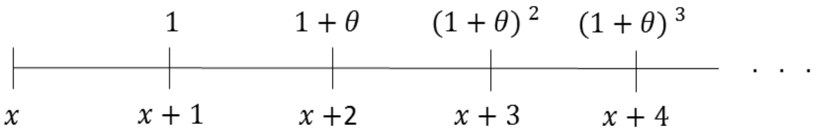
- Renda postecipada de termos constantes

$$a_x = v\, p_x + v^2\ {}_2p_x + v^3\ {}_3p_x + \cdots + v^{\omega-x}\ {}_{\omega-x}p_x = \sum_{k=1}^{\omega-x} v^k\ {}_kp_x$$

RENDAS
Rendas vitalícias

- Renda antecipada de termos em progressão geométrica

$$(G\ddot{a})_x^{\theta}$$
$$= 1 + (1+\theta)\, v\, p_x + (1+\theta)^2\, v^2\ {}_2p_x + \cdots + (1+\theta)^{\omega-x} v^{\omega-x}\ {}_{\omega-x}p_x$$
$$= \sum_{k=0}^{\omega-x} (1+\theta)^k v^k\ {}_kp_x$$



- Renda postecipada de termos em progressão geométrica

$$(Ga)_x^{\theta}$$
$$= v\, p_x + (1+\theta)\, v^2\ {}_2p_x + (1+\theta)^2 v^3\ {}_3p_x + \cdots$$
$$+ (1+\theta)^{\omega-x-1} v^{\omega-x}\ {}_{\omega-x}p_x = \sum_{k=1}^{\omega-x} (1+\theta)^{k-1} v^k\ {}_kp_x$$

RELAÇÕES ENTRE VARIÁVEIS ALEATÓRIAS E RENDAS VITALÍCIAS

Seguro de vida inteira

Pagamento em caso de morte de (x) Capital seguro de 1 u.m. pago no final do ano em que a morte ocorre.

Considerando a v.a. K o tempo de vida futura em anos completos, o seu valor atual será então

$$Z = v^{K+1}$$

e

$$\Pr\left(Z = v^{k+1}\right) = \Pr(K = k) = {}_{k}p_{x}q_{x+k}$$

RELAÇÕES ENTRE VARIÁVEIS ALEATÓRIAS E RENDAS VITALÍCIAS

Seguro de vida inteira

- Assim, o prémio desta modalidade de seguro denotado por A_x, será

$$A_x = E[Z] = E[v^{K+1}] = \sum_{k=0}^{\infty} v^{k+1} \ {}_kp_x q_{x+k}$$

e,

$$E(Z^2) = \sum_{k=0}^{\infty} (v^2)^{k+1} \ {}_kp_x q_{x+k}$$

$$Var(Z) = E(Z^2) - A_x^2$$

RELAÇÕES ENTRE VARIÁVEIS ALEATÓRIAS E RENDAS VITALÍCIAS

- Considerando a v.a. K definida como o tempo de vida futura em anos completos

$$Y = 1 + v + v^2 + v^3 + \cdots + v^K = \ddot{a}_{\overline{K+1|}} = \frac{1 - v^{K+1}}{1 - v} = \frac{1 - Z}{1 - v}$$

Então $\ddot{a}_x$ será o valor esperado de Y

$$E(Y) = E\left(\frac{1 - Z}{1 - v}\right) = \frac{1 - E(Z)}{1 - v} = \frac{1 - A_x}{1 - v} = \ddot{a}_x$$

RELAÇÕES ENTRE VARIÁVEIS ALEATÓRIAS E RENDAS VITALÍCIAS

- Basta redefinir a v.a. Y para que chegar a outros resultados

$$Y = 1 + rv + r^2v^2 + \cdots + r^Kv^K = (G\ddot{a})^{r}_{\overline{K+1|}}$$

$$Y = 1 + v_1 + v_1^2 + \cdots + v_1^K = \ddot{a}_{\overline{K+1|}} = \frac{1 - {v_1}^{K+1}}{1 - v_1} = \frac{1 - r^{K+1}v^{K+1}}{1 - rv}$$

$$E(Y) = E\left(\frac{1 - (rv)^{K+1}}{1 - rv}\right) = \frac{1 - \sum_{k=0}^{\infty}(rv)^{k+1}\ {}_kp_x q_{x+k}}{1 - rv}$$

Teorema Limite Central de Lyapunov

Seja $X_1, \ldots, X_n$ uma sucessão de variáveis aleatórias independentes e que $E(X_i) = \mu_i$ e

$V(X_i) = \sigma_i^2 < \infty$ e pelo menos um com dos σ_i^2 maior que zero.

Sejam $S_n = X_1 + X_2 + \cdots + X_n$ e $s_n^2 = \sum_{i=1}^{n} \sigma_i^2$. Se a condição de Lyapunov se verificar, isto é, se

existir um $\delta > 0$ tal que,

$$\frac{1}{s_n^{2+\delta}} \sum_{i=1}^{n} E(|X_i - \mu_i|^{2+\delta}) \to 0 \text{ quando } n \to \infty$$

então garante-se que,

$$\frac{\sum_{i=1}^{n} X_i - \sum_{i=1}^{n} \mu_i}{\sqrt{\sum_{i=1}^{n} \sigma_i^2}} \overset{a}{\sim} N(0,1)$$

Intervalos de confiança para uma faixa etária

T_x - valor atual das pensões em pagamento para um grupo de n indivíduos com idade x e pensão P_i

Sendo Y_i a v.a. definida anteriormente, tem-se

$$T_x = \sum_{i=1}^{n} X_i = \sum_{i=1}^{n} P_i \, Y_i$$

Assim, pelo Teorema Limite Central de Lyapunov

$$\frac{T_x - E(T_x)}{\sqrt{V(T_x)}} \overset{a}{\sim} N(0,1)$$

Intervalos de confiança para uma faixa etária

Desta forma pode obter-se o seguinte intervalo de confiança $(1-\propto)\times 100\%$ para T_x:

$$E(T_x) - z_{\propto/2}\sqrt{V(T_x)} \leq T_x \leq E(T_x) + z_{\propto/2}\sqrt{V(T_x)}$$

$$\Leftrightarrow$$

$$\sum_{i=1}^{n} P_i\, E(Y) - z_{\propto/2}\sqrt{\sum_{i=1}^{n} {P_i}^2\, V(Y)} \leq T_x$$

$$\leq \sum_{i=1}^{n} P_i\, E(Y) + z_{\propto/2}\sqrt{\sum_{i=1}^{n} {P_i}^2\, V(Y)}.$$

Intervalos de confiança para toda a população

T_{total} - valor atual das pensões em pagamento para uma população formada por k subgrupos, cada um correspondente à faixa etária k, com n_{x_k} indivíduos de idade x_k e pensão P_{i,x_k}

Assim,

$$T_{total} = \sum_{k=0}^{\omega} \sum_{i=1}^{n_{x_k}} P_{i,x_k} Y_{i,x_k} = \sum_{k=0}^{\omega} T_{x_k}$$

Pelo Teorema Limite Central de Lyapunov, tem-se

$$\frac{T_{total} - E(T_{total})}{\sqrt{V(T_{total})}} \overset{a}{\sim} N(0,1)$$

Intervalos de confiança para toda a população

Pode-se então, construir um intervalo de confiança $(1-\propto)\times 100\%$ para T_{total} :

$$E(T_{total}) - z_{\propto/2}\sqrt{V(T_{total})} \le T_{total} \le E(T_{total}) + z_{\propto/2}\sqrt{V(T_{total})}$$

$$\longleftrightarrow$$

$$\sum_{k=0}^{\omega}\sum_{i=1}^{n} P_i\, E(Y_{x_k}) - z_{\propto/2}\sqrt{\sum_{k=0}^{\omega}\sum_{i=1}^{n} P_i^{\,2}\, V(Y_{x_k})} \le T_{total}$$

$$\le \sum_{k=0}^{\omega}\sum_{i=1}^{n} P_i\, E(Y_{x_k}) + z_{\propto/2}\sqrt{\sum_{k=0}^{\omega}\sum_{i=1}^{n} P_i^{\,2}\, V(Y_{x_k})}$$

Caso Prático

IC faixa etária

Faixa etária de 65 anos com 52 indivíduos e pensão média

17 473€

$$E(Y) = G\ddot{a}_{65} = 14{,}95$$

$$VAPP_{65} = \sum_{i=1}^{52} P_i \, G\ddot{a}_{65} = 13\,581\,341 \text{ €}.$$

$$V(Y) = \frac{1}{(1-rv)^2}\left(\sum_{k=0}^{\infty}((rv)^{k+1})^2 \; {}_kp_{65}q_{65+k} - \left(\sum_{k=0}^{\infty}(rv)^{k+1} \; {}_kp_{65}q_{65+k}\right)^2\right) = 23{,}28$$

IC faixa etária

Faixa etária de 65 anos com 52 indivíduos e pensão média

17 473€

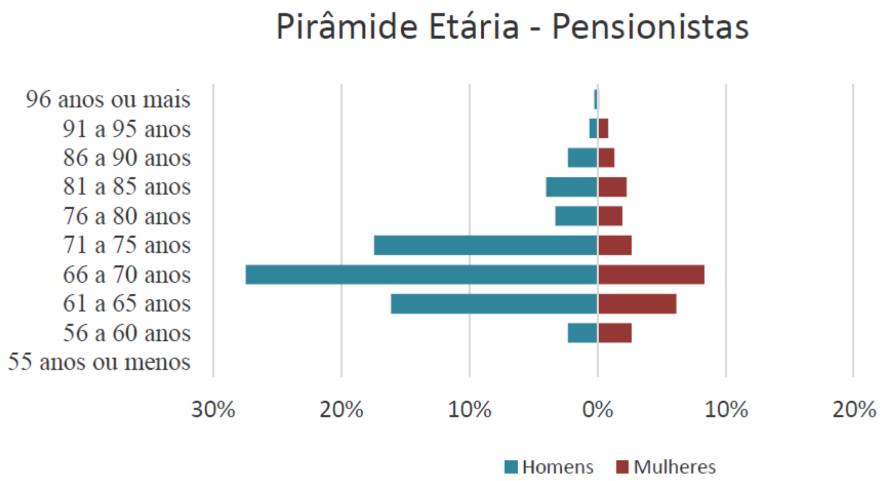
Intervalo com coeficiente de confiança 95%

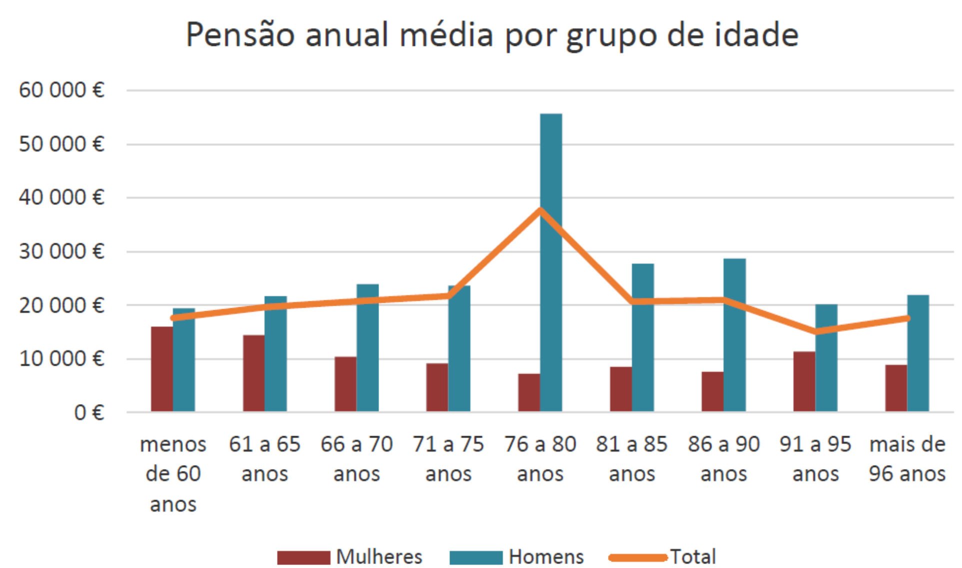
$$13\,581\,341 - 1{,}96\sqrt{\sum_{i=1}^{n} {P_i}^2 \times 23{,}28} \leq VAPP_{65} \leq 13\,581\,341 + 1{,}96\sqrt{\sum_{i=1}^{52} {P_i}^2 \times 23{,}28}$$

$$12\,287\,075 \leq VAPP_{65} \leq 14\,875\,607$$

IC VAPP

População de pensionistas dos 60 a 102 anos com 827 indivíduos.





IC VAPP

População de pensionistas dos 60 a 102 anos com 827 indivíduos.

$$\sum_{k=0}^{\omega}\sum_{i=1}^{n} P_i\, E\left(Y_{x_k}\right) = \sum_{k=0}^{w}\sum_{i=1}^{n} P_i\, G\ddot{a}_{x_k} = 187\,517\,616$$

$$\sqrt{\sum_{k=0}^{\omega}\sum_{i=1}^{n} {P_i}^2\, V\left(Y_{x_k}\right)} = \sqrt{10\,091\,828\,844\,187} = 3|176\,764$$

IC VAPP

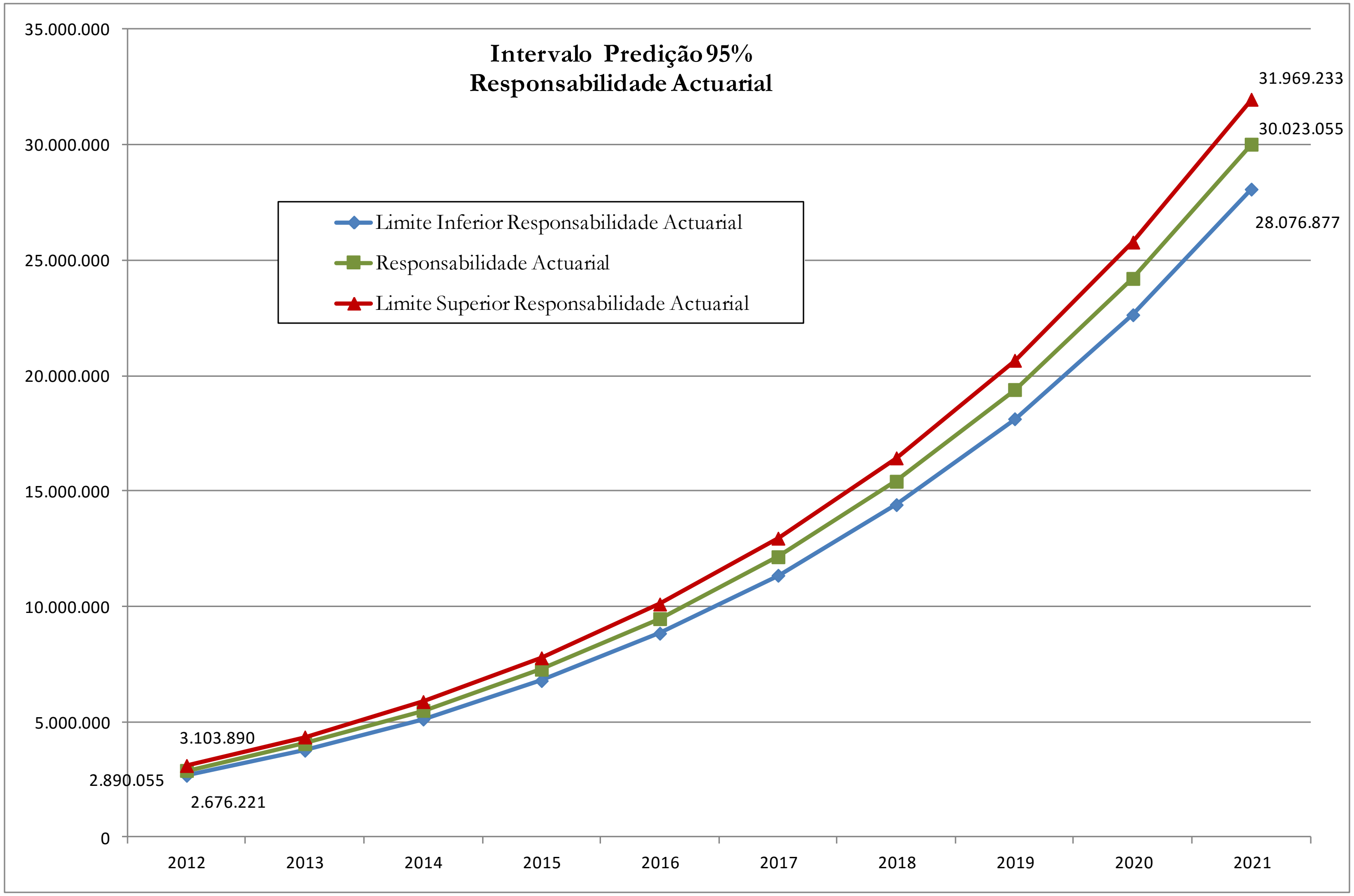
População de pensionistas dos 60 a 102 anos com 827 indivíduos.

Intervalo com coeficiente de confiança 95%

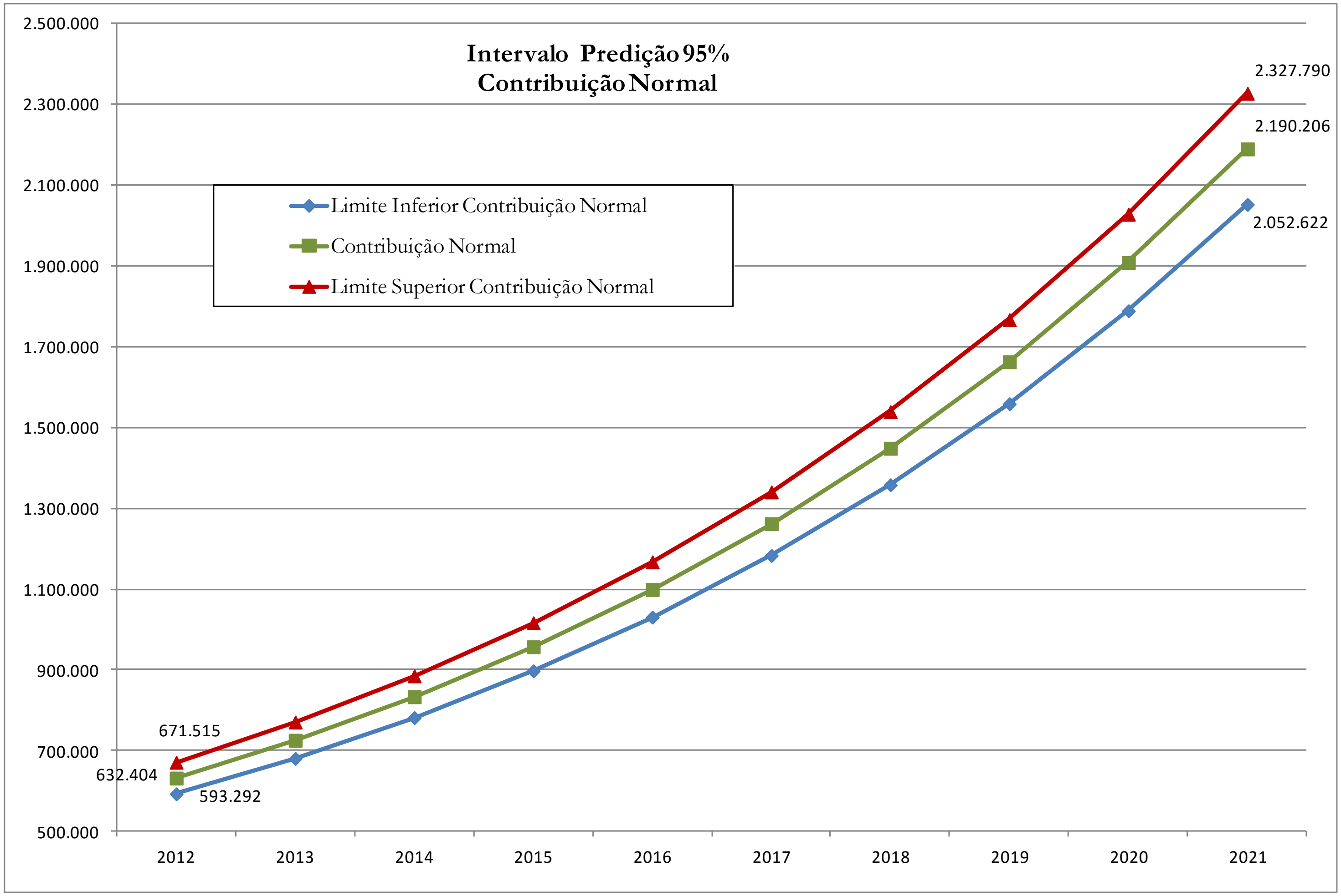
$$181\,291\,273 \leq VAPP \leq 193\,743\,959$$

Outras Aplicações

Responsabilidade Actuarial



Contribuição Normal



Referências

Billingsley, P. "Probability and Measure", 3rd ed., New York, John Wiley & Sons, 1995

Bowers, N.L., Gerber, H.U. et al. "Actuarial Mathematics", The society of actuaries, 1997

Dickson, D.; Hardy, M.; Waters,H. "Actuarial Mathematics for Life Contingent Risks", Cambridge University Press, Institute and Faculty of Actuaries, 2nd ed., 2013

Fischer, H. "A History of the Central Limit Theorem: From Classical to Modern Probability Theory", Springer, 2010

Garcia, J. "Introdução à Matemática Actuarial", Abril 2007

Gerber, H.U. "Life Insurance Mathematics", 3rd edition, Springer, 1997